

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO COVARIACIONAL EN UN AMBIENTE GRÁFICO DINÁMICO. HACIA UNA GÉNESIS INSTRUMENTAL

Alejandro Del Castillo Escobedo, Gisela Montiel Espinosa
Tecnológico de Madero
C.B.T.i.s. 164
CICATA-IPN
alejandro.delcastilloescobedo@gmail.com
Campo de investigación: Tecnología Avanzada

México

Nivel: Medio

Resumen. *La tecnología puede resultar un recurso didáctico para que los estudiantes examinen situaciones y problemas desde diversos ángulos, específicamente, el uso de software dinámico ofrece un medio útil para que ellos visualicen, exploren y construyan relaciones matemáticas. Estos apoyos modifican tan fuertemente el medio ambiente de trabajo que no basta con adaptar situaciones matemáticas clásicas, hay que concebir nuevas situaciones que tomen en consideración las potencialidades y las restricciones de la tecnología. Esto ha llevado a la creación de una génesis instrumental que estudia la construcción hecha por el estudiante cuando interactúa con un artefacto, convirtiéndolo en instrumento, a través de un proceso, de manera tal que se lo apropia y lo hace parte de su actividad matemática, actividad que en esta investigación está relacionada con el desarrollo del pensamiento covariacional.*

Palabras clave: función, génesis instrumental, instrumentación, instrumentalización, pensamiento covariacional

Introducción

Tradicionalmente el aprendizaje del concepto de función se ha enfocado en un tratamiento en términos simbólicos y gráficos. (véase a Harel y Dubinsky (1992) para un repertorio de investigaciones sobre el tema). Debido a la complejidad de elementos y representaciones en la enseñanza de funciones (dominio, codominio, gráficas, tablas, etc.) de forma separada o sin vínculos, no se permite que el estudiante construya el concepto, dada la distorsión del objeto en relación con el saber sabio y la confusión que esto causa en el estudiante al mirar muchos objetos allí donde el matemático no ve más que uno (Ruiz y Rodríguez, 2000).

Las múltiples definiciones aceptadas por la comunidad matemática; relación de dependencia, conjunto de pares ordenados, etc., son definiciones equivalentes, pero difieren conceptualmente (Vinner y Dreyfus, 1989).

La noción de función se centra en gran medida en el registro algebraico motivada, epistemológicamente, por la influencia de dicho registro en el desarrollo histórico del concepto y didácticamente, por la fuerza que encuentra en el amparo algorítmico (Ruiz, 2000).

Podemos concluir que el concepto escolar de función predominante en la actualidad es aquel que alude a una regla de correspondencia y en la investigación en matemática educativa ha sido ampliamente cuestionada por su carácter estático, algebraico y algorítmico (fórmula->tabla->puntos en el plano->gráfica) (Del Castillo y Montiel, 2007).

El Pensamiento Covariacional

Investigaciones, como las de Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002), han considerado que un acercamiento al concepto de función desde su naturaleza covariacional permite pensar en las funciones de diferente tipo como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas y dicha covariación puede jugar un papel fundamental en el desarrollo y consolidación de estas funciones. Así como ser una importante habilidad para interpretar, describir y representar una función de un evento dinámico. También permite un mejor entendimiento de los principales conceptos de cálculo.

En México aparecen también réplicas a la crítica de la concepción de correspondencia de función: Ferrari (2004 y 2005), Chimal(2005) y Nieves(2005), han propuesto en sus trabajos una concepción covariacional de función.

La concepción covariacional de función destaca dos aspectos principales de la relación funcional:

- ❖ La función es una relación entre cantidades, las cuales pueden ser representadas por un par ordenado cuyas coordenadas representan valores de dos cantidades simultáneamente, y
- ❖ conlleva a la idea de que los dos valores de las cantidades pueden, en efecto variar (Saldanha y Thompson, 1998).

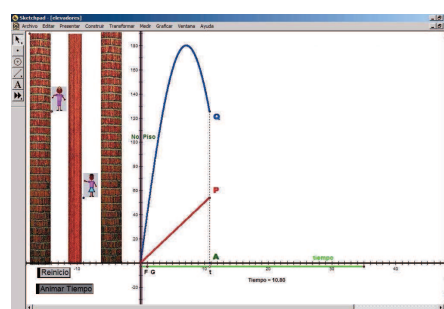
El pensamiento covariacional consiste en la coordinación de las dos variables, cada una de las cuales pueden ser concebidas variando independientemente. Finalmente, esta forma de pensar permite a los estudiantes:

1672

- ❖ Concebir una gráfica como una colección de puntos,
- ❖ concebir la colección de puntos siendo generadas siguiendo simultáneamente, las dos cantidades cuyos valores varían y
- ❖ concebir que todo punto en la gráfica representa, a la vez, valores simultáneos de dos cantidades.

El Ambiente Gráfico Dinámico

Un Ambiente de Gráfico Dinámico (AGD) puede ser desarrollado a partir de un entorno de Geometría Dinámica. El AGD permite diseñar secuencias que permite a los estudiantes acceder al significado de función (no sólo geométrico sino también numérico) como objeto que incorpora una relación asimétrica de covariación entre dos trayectorias una dependiente de la otra y, por lo tanto, entre dos variables una dependiente de la otra. De esta forma, el AGD representa relaciones funcionales que no necesariamente están especificadas por símbolos, tablas o graficas.



Se considera que el ambiente geométrico dinámico puede proporcionar la representación básica de la variación y de la dependencia funcional, y a partir de esto introducir en el estudiante la idea de función. Considerando a la curva como la representación espacial de una función en el plano coordenado como la trayectoria de un punto en movimiento P con coordenadas $(x, f(x))$, donde el punto A representa la variable independiente y se mueve sobre el eje de las abscisas, la orden o instrucción Trace(Traza, Rastro) nos permite pasear por o explorar dicha trayectoria o curva. mientras que la orden Drag(Arrastre) permite experimentar la combinación de dos movimientos interrelacionados, así como la dependencia de movimiento entre los puntos básicos y los puntos construidos que le permiten experimentar con una simulación de movimiento real (Del Castillo y Montiel, 2007).

1673

Lo que caracteriza a los AGD es el movimiento, movimiento donde se preservan las relaciones construidas entre cada uno de sus elementos. Con lápiz y papel no se puede representar

directamente la variación, en éste ambiente se puede experimentar bajo la forma de movimiento. La idea de variación está enraizada en el movimiento, los puntos pueden desplazarse por la pantalla y representar variables básicas. Por lo tanto, el AGD, incorpora y conecta de manera robusta las ideas de variación y dependencia funcional (Mariotti, Laborde y Falcalde, 2003).

¿Máquina, Herramienta, Artefacto o Instrumento?

Como máquina entenderemos un dispositivo complejo, relativamente alejado en su interacción con el hombre, pero más afín con manufactura industrial o procesos similares.

Una herramienta es un dispositivo que típicamente proporciona una ventaja (generalmente mecánica) al ejecutar una tarea. Entenderemos por herramienta al dispositivo que está disponible para dar sustento a la actividad humana. Un teléfono, un martillo, el lenguaje de los sordomudos, el lenguaje que usamos nosotros, son ejemplos de herramientas.

Al referirse de una herramienta sin considerar al usuario y sus usos, estaremos hablando de un artefacto.

Esto es lo que expresa Rabardel (1995) sobre los instrumentos:

Los instrumentos tienen un doble uso en el seno de las actividades educativas. En los alumnos, influyen profundamente en la construcción del conocimiento y los procesos de conceptualización. Para los profesores, pueden considerarse como variables sobre las cuales se actúa para la concepción y el control de las situaciones pedagógicas.

Un artefacto es una "cosa que habrá sufrido una transformación de origen humano". Finalmente utilizaremos el término de instrumento para designar el artefacto en situación, inscrito en un uso, en una conexión instrumental a la acción del sujeto, como medio de éste (Rabardel, 1995, p.49).

La noción de instrumento es ligada a una tarea, que es asociada a su vez con un objeto. Así el instrumento autoriza al usuario a actuar sobre el objeto. La noción de instrumento también está asociada con otros dos elementos: un objeto y un sujeto.

La posición intermedia del instrumento lo hace un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto. Constituye un universo intermedio cuya característica principal es

1674

pues doblemente adaptarse al sujeto y al objeto, una adaptación en términos de propiedades materiales y también cognoscitivas y semióticas en función del tipo de actividad en el cual el instrumento se inserta o está destinado a insertarse (Rabardel, 1995, p.72).

Para (Trouche, 2005) un instrumento es lo que el sujeto construye a partir de un artefacto. La gente usa el artefacto para varios propósitos y por lo tanto crea sus instrumentos personales. Ver la siguiente figura, donde un sujeto, un albañil, crea diferentes instrumentos a partir de un artefacto, la cuchara o bellota.

Hacia una Génesis Instrumental

Un ambiente tecnológico como el AGD permite introducir a los estudiantes a diversas formas de representación de los conceptos matemáticos. Para hacer un uso óptimo de estos ambientes debemos entender cómo los estudiantes interactúan con dicho ambiente y cómo el pensamiento matemático de los estudiantes es influenciado por su uso.

Es decir, buscamos que la tecnología se convierta en un *instrumento* para el que aprende, por ello consideramos a la aproximación instrumental nuestro marco teórico, que abarca elementos de la ergonomía cognoscitiva (Verillon y Rabardel, 1995) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), buscando aportar a la teoría en el contexto de un AGD.



Trouche (2004) considera un *instrumento* como una extensión del cuerpo, un órgano funcional hecho de un artefacto y de una componente psicológica (la organización de la actividad con un fin dado). El instrumento es entonces el producto de una *historia*: el usuario a partir de un artefacto, construye un instrumento, en un entorno determinado, para realizar una tarea específica. Esta historia, *génesis instrumental*, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar a

las características del artefacto con la actividad del sujeto, sus ideas previas y su antiguo método de trabajo

La génesis instrumental, es una evolución en curso, no trivial y que lleva mucho tiempo. Una relación bilateral entre el artefacto y el usuario es establecida: mientras el conocimiento del estudiante dirige la manera en que el instrumento es usado y en cierto modo forma al instrumento (la instrumentalización), las potencialidades y las restricciones del instrumento influyen en las estrategias de solución del problema por el estudiante y en las correspondientes concepciones emergentes (la instrumentación).

La instrumentalización

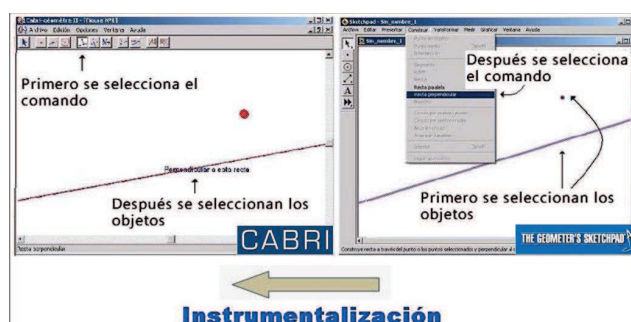
En el curso del proceso de instrumentalización, el sujeto se apropia de las propiedades iniciales del artefacto, derivadas de su primera uso. El sujeto se adapta al artefacto. El sujeto puede también construir nuevas funciones del artefacto, así es el artefacto el que se adapta a las necesidades del usuario.

Este proceso que dirige el sujeto, implica varias etapas:

- ❖ Descubrimiento y selección de las teclas relevantes (para este caso, en el AGD)
- ❖ Personalización (uno ajusta el AGD a sus necesidades personales)
- ❖ Transformación de la herramienta, inclusive con modificaciones no previstas por el diseñador: modificación de la barra de menú, creación de los atajos del teclado, creación de herramientas personales.

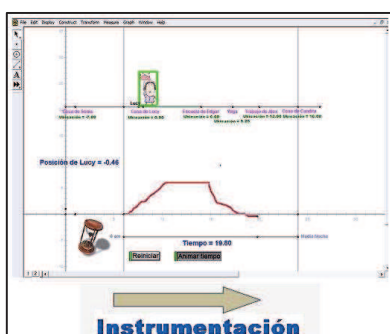
La instrumentalización es la expresión de la actividad específica de un sujeto: sobre lo que el usuario piensa en relación para que fue construido el artefacto y cómo debe ser utilizado: la elaboración de un instrumento ocurre en su uso.

La instrumentalización conduce así al enriquecimiento de un artefacto, o a su empobrecimiento (Trouche, 2005, p.148).



La instrumentación

El proceso de instrumentación se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto. Los esquemas de uso tienen una componente privada, es decir, una construcción consustancial al sujeto. Tienen también un componente social, es decir, resultante de las interacciones del sujeto con los otros usuarios, diseñadores y de las distintas ayudas exteriores. De la misma forma que la



utilización de las señales psicológicas influye sobre los pensamientos del sujeto, la génesis instrumental permite hacer evolucionar las concepciones del sujeto relativo al objeto contemplado por el instrumento. Las concepciones evolucionan por la adaptación a las dificultades de las herramientas y también por la consideración de las potencialidades.

El progresivo descubrimiento del sujeto de las propiedades (intrínsecas) de los artefactos va acompañado de la adaptación de sus esquemas, así como los cambios en la significación del instrumento resultante de la asociación del artefacto con los nuevos esquemas.

El nacimiento de estos esquemas, la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas (que dan así un nuevo significado a los artefactos), la adaptación de los esquemas (que contribuyen a sus cambios en el significado), constituye esta segunda dimensión de la génesis instrumental: el proceso de instrumentación.

Conclusiones

Sólo con los materiales concretos no se generaría aprendizaje de las nociones matemáticas, es necesario que el alumno interactué con ellos en un ambiente organizado. Esta interacción es objeto de estudio dentro de la Matemática Educativa y nuestro interés en este trabajo.

La génesis instrumental, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar a las características del artefacto (sus potencialidades y sus restricciones) con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antiguo método de trabajo.

Debemos de distinguir entre los diferentes esquemas de uso, las potencialidades y las restricciones del AGD. Trabajar con los esquemas que organizan la actividad con un artefacto asociado a fin de desarrollar un pensamiento covariacional entre los estudiantes.

Es esta génesis la que buscamos lograr y caracterizar en nuestro trabajo de investigación.

Referencias bibliográficas

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12 (1), 77-111.

Chimal R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 568-580. México.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (pp. 45-50). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.)(1992). *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America. Notes 25.

Mariotti M.A, Laborde C. y Falcade R. (2003) Function and Graph in a DGS environment, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA 3*.(pp. 237 – 244).

Nieves, A. (2005). *Una metodología de trabajo para estudiar las situaciones de cambio en problemas geométricos que se consideran como problemas de máximos y mínimos*. Tesis de Doctorado. no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Armand Colin.

Ruiz, L., Rodríguez, J. (2000). La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función en enseñanza secundaria. En Cantoral, R. (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 265 - 290). Sevilla, España: Grupo Editorial Iberoamérica.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Thompson, P. y Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In Kilpatrick, J., Martin, G. W., and Schifter D. (Eds.) *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9(3), 281-307).

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments, in *The didactical Challenge of Symbolic Calculators, turning a computational device into a mathematical instrument*, Guin, Ruthven and Trouche. Springer, (pp. 137-162).

Verillon P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education* 10(1), 77-101.

Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 356-366.